Bewegung

eines

schweren Punktes auf einer um ihre Axe drehbaren Rotationsoberfläche.

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Dr. phil. Heinrich Dittmann.

Schwerin,
1879.
Hofbuchdruckerei von Dr. F. Bärensprung.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553624_0201

§ 1. Einleitung.

Jacobis Theorem.

Bei Zugrundelegung eines rechtwinkligen Coordinatensystems lässt sich die Gleichung einer Rotationsoberfläche, deren Axe mit der z-Axe zusammenfällt, in ihrer allgemeinsten Form so darstellen:

$$F\,(z,\ \sqrt{x^2 + y^2}) = 0 \text{ wenn:}$$
$$F\,(z,\ y) = 0$$

die Gleichung der erzeugenden Curve bedeutet. Unsere Oberfläche soll noch in unbekannter Weise um ihre Axe rotiren; es wird zweckmässig sein, die Bewegung des materiellen Punctes zu beziehen auf ein zweites, mit der Oberfläche fest verbundenes, ebenfalls rechtwinkliges Coordinatensystem $\xi\eta\zeta$, das in einer beliebig zu wählenden Anfangsposition mit dem ursprünglichen sich decken soll. Da nach dieser Definition stets:

$$\zeta = z \text{ und } \xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2 \text{ bleibt,}$$

so lautet die Gleichung unserer bewegten Oberfläche bezogen auf das relative System:

$$F\,(\zeta,\ \sqrt{\xi^2 + \eta^2}) = 0$$

Zwischen beiden Coordinatensystemen finden, wenn ω den Winkel zwischen $+ x$ und $+ \xi$ zur Zeit t bedeutet, folgende Beziehungen statt:

$$(1.,)\quad \begin{cases} x = \xi \cos\omega - \eta \sin\omega \\ y = \xi \sin\omega + \eta \cos\omega \\ z = \zeta \end{cases}$$

Nach dieser Coordinatenbestimmung wollen wir an die Aufstellung der Bewegungsgleichungen unseres Problems gehen; wir wählen dazu die Jacobi-Hamiltonsche Methode, da dieselbe manche Rechnungsvortheile gewährt.

Dieselbe lässt sich etwa in folgendem Satze zusammenfassen:

„Bedeutet n die Anzahl der vorhandenen materiellen Puncte, m die Anzahl der zwischen ihnen bestehenden Bedingungsgleichungen, so suche man zunächst durch Einführung von $3n - m = \mu$ unabhängigen Variabeln $q_1\ q_2 \ldots q\mu$ die m Bedingungsgleichungen des Systems identisch zu erfüllen und drücke die lebendige Kraft T und die Kräftefunction U in diesen neuen Variabeln aus. Dann bilde man den Ausdruck:

$$H = \sum_1^{\mu}{}_{\lambda}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\lambda}\, q'_\lambda\right) - T - U \qquad *$$

und eliminire aus diesem die Differentialquotienten $q_1'\ q_2' \ldots q\mu'$ mit Hülfe der μ Gleichungen:

$$\frac{\partial T}{\partial q'_\lambda} = \frac{\partial V}{\partial q_\lambda}$$

Dann ist:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$$

die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung der Bewegung des Systems. Hat man hiervon eine vollständige Lösung V gefunden und nennt man $a_1\ a_2 \ldots a\mu$ die μ willkürlichen Constanten, so sind die μ Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial a_\lambda} = \alpha_\lambda, \text{ wo die } \alpha_\lambda$$

neue willkürliche Constante bedeuten, die endlichen Bewegungsgleichungen des Systems.“ —

§ 2. Aufstellung der Integrale des Problems für die Oberflächen:

$\xi^2 + \eta^2 = f^2(\zeta)$

Wir wollen uns zunächst auf einen einfacheren Fall des gestellten Problems beschränken, indem wir die Annahme machen, es lasse sich $\xi^2 + \eta^2$ explicite als Function von ζ ausdrücken.

---

*∂ bedeute den partiellen Differentialquotienten.

Es sei:

(2) $\xi^2 + \eta^2 = r^2 = f^2(\zeta)$

Wir haben zuerst neue Variable der Art einzuführen, dass die Bedingungsgleichung (2) identisch erfüllt wird. Dies geschieht am einfachsten durch den Ansatz:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} f(\zeta) &= r \\ \xi &= r\cos q \\ \eta &= r\sin q \end{aligned}\right\}$$

wo r das Loth von dem Puncte auf die ζ Axe, q den Winkel von r gegen $+\xi$ bedeutet.

Setzt man der Einfachheit wegen die Masse des Punctes $= 1$, so ist die lebendige Kraft T definirt durch die Gleichung:

$$2T = x'^2 + y'^2 + z'^2 *$$

Wegen (1) ist:

$$\begin{aligned} x' &= \xi'\cos\omega - \eta'\sin\omega - \xi\sin\omega\,\omega' - \eta\cos\omega\,\omega' \\ y' &= \xi'\sin\omega + \eta'\cos\omega + \xi\cos\omega\,\omega' - \eta\sin\omega\,\omega' \\ z' &= \zeta' \end{aligned}$$

und somit:

$$2T = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + \omega'(\xi^2 + \eta^2) - 2\omega'(\eta\xi' - \eta'\xi)$$

oder mit Hülfe der Gleichungen (3) und deren Ableitungen:

$$\begin{aligned} \xi' &= r'\cos q - r\sin q.q' \\ \eta' &= r'\sin q + r\cos q.q' \end{aligned}$$

ausgedrückt in q und r:

$$2T = r'^2\left(1 + \left(\frac{d\zeta}{df}\right)^2\right) + r^2 q'^2 + \omega'^2 r^2 + 2\omega' r^2 q'$$

endlich ζ statt r eingeführt:

$$(4)\quad 2T = \zeta'^2\left(1 + \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2\right) + f^2 q'^2 + \omega'^2 f^2 + 2\omega' f^2 q'$$

Die Hamiltonsche Function ist:

$$\begin{aligned} 2H &= 2\sum_1^2 \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\lambda}\, q'_\lambda\right) - 2T - 2U \\ &= 2T_2 - 2T_0 - 2U, \end{aligned}$$

---

* $x' = \frac{dx}{dt}$ $y' = \frac{dy}{dt}$ $z' = \frac{dz}{dt}$

wo wir unter T_2 und T_0 die Summen derjenigen Glieder von T verstehen, welche die Differentialquotienten der Variabeln ζ und q nur in der zweiten resp. in der nullten Potenz enthalten.

Bedeutet g die Intensität unserer constanten Kraft, deren Richtung der $+\ \zeta$ Axe entgegengesetzt angenommen sein mag, so ist:

$$U = -g\zeta$$

Somit erhalten wir für H den Werth:

$$2H = \zeta'^2 \left(1 + \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2\right) + f^2\, q'^2 - f^2\, \omega'^2 + 2g\zeta$$

Aus dieser Function müssen die Differentialquotienten eliminirt werden mit Hilfe der Gleichungen:

$$\frac{\partial T}{\partial q'}_{\lambda} = \frac{\partial V}{\partial q}_{\lambda} \quad \text{Es ist:}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \zeta'} = \zeta' \left(1 + \left(\dfrac{df}{d\zeta}\right)^2\right) = \dfrac{\partial V}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial T}{\partial q'} = f^2\,(q' + \omega') = \dfrac{\partial V}{\partial q} \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen erhält man schliesslich:

$$(6.,)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + H = 0 = 2\dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\left(\dfrac{\partial V}{\partial \zeta}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{df}{d\zeta}\right)^2} \\ \qquad + \dfrac{\left(\dfrac{\partial V}{\partial q}\right)^2}{f^2} - 2\dfrac{\partial V}{\partial q}\,\omega' + 2g\zeta \end{cases}$$

Dies ist die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung. Dieselbe enthält t und q selbst nicht; daher wird ihr genügt durch den Ansatz:

$$(7)\qquad V = \alpha\,(q + \omega) + \beta t + \varphi\,(\zeta)$$

wo $\varphi\,(\zeta)$ eine noch zu bestimmende Function von ζ allein, α und β willkürliche Constante bedeuten. Durch Substitution der Lösung (7) in (6) erhält man:

$$2\beta + \frac{\left(\frac{d\varphi(\zeta)}{d\zeta}\right)^2}{1 + \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2} + \frac{\alpha^2}{f^2} + 2g\zeta = 0$$

und hieraus:

$$\varphi(\zeta) = \pm \int \frac{d\zeta}{f} \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2\right\} \Phi}$$

$$\Phi = 2f^2 (- g\zeta - \beta) - \alpha^2$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \pm \alpha \int \frac{d\zeta}{f} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2}{\Phi}}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = \pm \int f d\zeta \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2}{\Phi}}$$

Dadurch:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial\alpha} = c_1 = q + \omega \pm \alpha \int \frac{d\zeta}{f} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2}{\Phi}} \\ \frac{\partial V}{\partial\beta} = c_2 = t \pm \int f d\zeta \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2}{\Phi}} \end{cases}$$

Die Formeln (8) repräsentiren die Bewegungsgleichungen unseres Systems; aus ihnen lassen sich $q + \omega$ und t durch Quadraturen als Functionen von ζ bestimmeu; c_1 und c_2 sind die willkürlichen Integrationsconstanten.

Statt ζ hätte man auch die Variable r einführen können. Es sei; $\zeta = X(r)$. Man erhält:

$$\psi(r)^* = \pm \int \frac{dr}{r} \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dX(r)}{dr}\right)^2\right\} \Psi}$$

$\Psi = 2r^2 (- g X(r) - \beta) - \alpha^2$ und daraus:

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha} = c_1 = q + \omega \pm \alpha \int \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dX(r)}{dr}\right)^2}{\Psi}}$$

*analog $\varphi(\zeta)$

$$\frac{\delta V}{\delta \beta} = c_2 = t \pm \int r dr \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{d X(r)}{dr}\right)^2}{\Psi}}$$

Die Constanten α und β bestimmen sich am leichtesten aus den Gleichungen (5), indem man dieselben auf einen bestimmten Anfangszustand bezieht und (7) berücksichtigt. Man erhält:

$$\frac{\delta V}{\delta q} = f^2 (q' + \omega') = \alpha \text{ und:}$$

$$\frac{\delta V}{\delta \zeta} = \zeta' \left(1 + \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2\right) = \frac{1}{f} \sqrt{\left(1 + \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2\right) \Phi}$$

Diese Gleichungen ergeben auf einen beliebigen Anfangszustand bezogen, für den die Grössen:

$$t\ \zeta\ \zeta'\ f \frac{df}{d\zeta}\ q'\ \omega' \text{ resp. mit:}$$

$$t_0\ \zeta_0\ \zeta_0'\ f_0 \left(\frac{df}{d\zeta}\right)_0\ q_0'\ \omega_0' \text{ bezeichnet seien:}$$

$$\alpha = f_0^2 (q_0 + \omega_0)' = r_0^2 (q_0 + \omega_0)'$$

$$2\beta = -2g\zeta_0 - \zeta_0'^2 \left(1 + \left(\frac{df}{d\zeta}\right)_0^2\right) - f_0^2 (q_0 + \omega_0)'$$

Die Ausdrücke auf den rechten Seiten sind einer einfachen geometrischen Deutung fähig. Wir legen durch die Anfangsposition des Punctes und die ζ Axe eine Vertikalebene und errichten auf derselben im Anfangspunct der Bewegung das Loth. Es bedeute v_0 die anfängliche Geschwindigkeit nach Stärke und Richtung, ν ihren Winkel mit dem construirten Loth. Wir zerlegen v_0 in 2 Componenten, die erste in der Richtung des horizontalen Lothes $= v_0 \cos \nu$; die andre nach der Geraden, welche die durch v_0 und das Loth gelegte Ebene auf der Vertikalebene markirt. Demnach hat man $r_0 (q_0 + \omega_0)' =$ die anfängliche Winkelgeschwindigkeit in horizontaler Richtung $= v_0 \cos \nu$. Die Anfangsgeschwindigkeit in der Richtung der ζ Axe $-\zeta_0'$ — ist ein Theil der zweiten Componente $= (v_0 \sin \nu) \cos \mu$, wo μ den Winkel zwischen ζ_0' und der zweiten Componente von v_0 bedeutet.

Da aber:

$$\left(\frac{df}{d\zeta}\right)_0 = \left(\frac{dr}{d\zeta}\right)_0 = \operatorname{tg} \mu$$

so wird:

$$\zeta_0'^2 \left(1 + \left(\frac{df}{d\zeta}\right)_0^2\right) = v_0^2 \sin^2 \nu =$$

dem Quadrat der Anfangsgeschwindigkeit in der Vertikalebene:

Wir erhalten schliesslich:

$$(9.,) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = f_0 \, v_0 \cos \nu \\ 2\beta = -2g \, \zeta_0 - v_0^2 \end{array} \right\}^*$$

Substituiren wir diese Werthe in unsere Integrale (8) und verfügen über unser relatives System so, dass für eine noch zu wählende Position:

$t = 0 \qquad q_1 + \omega_1 = 0 \qquad \zeta = \zeta_1$ ist,

so nehmen dieselben die Form an:

$$(10.,) \quad \left\{ \begin{array}{l} q + \omega = \pm f_0 \, v_0 \cos \nu \int_{\zeta_1}^{\zeta} \frac{d\zeta}{f} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2}{\Phi}} \\ \\ t = \pm \int_{\zeta_1}^{\zeta} f d\zeta \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2}{\Phi}} \\ \\ \Phi = f^2 \left[v_0^2 + 2g \left(\zeta_0 - \zeta\right)\right] - f_0^2 \, v_0^2 \cos^2 \nu \end{array} \right\}$$

§. 3. Ermittelung derjenigen Formen von f, welche die Integrale (10) zu elliptischen machen. —

Wir wollen untersuchen, für welche speciellen Formen von f die Integrale (10) einer weiteren Behandlung fähig sind. Aus der Form der letzteren ersieht man, dass dies der Fall sein wird, falls f^2 eine rationale algebraische Function von ζ

---

* Die Beziehungen der Anfangsconstanten zu einander veranschaulicht Fig. I.

ist; man erhält alsdann im Allgemeinen Abelsche Integrale. Die allgemeinste Form von f^2 würde in diesem Falle sein:

$$(11.,)\quad \left\{ f^2 = \frac{fm\ (\zeta)}{fn\ (\zeta)} \right.$$

wo mit fm und fn rationale algebraische Functionen vom m. respective n. Grade bezeichnet sein mögen.

Aus (11) folgt:

$$2f\frac{df}{d\zeta} = \frac{fn\ (\zeta)\ \frac{dfm\ (\zeta)}{d\zeta} - fm\ (\zeta)\ \frac{dfn\ (\zeta)}{d\zeta}}{(fn\ (\zeta))^2}$$

$$\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 = \frac{\left(fn\ (\zeta)\ \frac{dfm\ (\zeta)}{d\zeta} - fm\ (\zeta)\ \frac{dfn\ (\zeta)}{d\zeta}\right)^2}{4fm\ (\zeta)\ (fn\ (\zeta))^3}$$

$$(12.,)\quad \left\{ \frac{1 + \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2}{f^2\ (-2g\zeta - 2\beta) - \alpha^2} \right. = \frac{\Psi}{4fm\ (\zeta)\ (fn\ (\zeta))^2\ \Phi}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(13.)\quad \Psi = 4fm\ (\zeta)\ (fn\ (\zeta))^3 + \left(fn\ (\zeta)\ \frac{dfm\ (\zeta)}{d\zeta} - fm\ (\zeta)\ \frac{dfn\ (\zeta)}{d\zeta}\right)^2$$

$$(14.)\quad \Phi = fm\ (\zeta)\ (-2g\zeta - 2\beta) - \alpha^2\ fn\ (\zeta)$$

Durch Multiplication von (12) mit f^2 respective $\frac{1}{f^2}$ erhält man die Quadrate der Factoren von $d\zeta$ in den Integralen (10) nämlich:

$$\frac{\Psi}{4\Phi\ (fn\ (\zeta))^3} \text{ und } \frac{\Psi}{4\Phi\ (fm\ (\zeta))^2\ fn\ (\zeta)}$$

Zieht man $\frac{\Psi^2}{4\ (fn\ (\zeta))^2}$ und $\frac{\Psi^2}{4\ (fm\ (\zeta))^2}$ aus der Wurzel heraus, so behält man beidemal:

$$\left\{ \frac{1}{\Phi.\ \Psi.\ fn\ (\zeta)} \right\} \text{ also:}$$

„Wenn f^2 eine algebraische rationale Function ist, so bleibt die irrationale Function in beiden Integralen dieselbe.“ —

Sollen die Integrale nicht hyperelliptisch werden, so muss, falls, wie vorausgesetzt wird, fm (ζ) und fn (ζ) keinen gemeinsamen Factor enthalten, wegen der Form von Φ sein:

$$m \leqq 3 \text{ und } n \leqq 4$$

und ausserdem:

Ψ fn (ζ) = einem vollständigen Quadrat.

Letzere Bedingung braucht dann nicht erfüllt zu sein, wenn Φ von einem geringeren Grade als dem 4. ist. Es genügt alsdann, wenn

$\Psi . \Phi .$ fn $(\zeta) = X^2 f_4 (\zeta)$ ist, wo X eine rationale algebraische Function bedeutet.

Suchen wir jetzt aus allen möglichen Fällen diejenigen heraus, welche unsere Integrale elliptisch machen.

1. Der einfachste Fall ist:

$m = 0 \quad n = 0 \quad f^2 (\zeta) = \text{const.}$

$\Psi . \Phi .$ fn (ζ) ist eine Function vom ersten Grade.

2. $m = 1 \quad n = 0$

Der Ausdruck (15) wird vom 3. Grade.

3. $m = 2 \quad n = 0$

Φ ist vom 3. Grade.

Ψ fn (ζ) - - 2. -

Schon hier kommen wir im allgemeinen Falle auf Abelsche Integrale. Elliptisch werden sie nur, wenn

Ψ fn (ζ) ein volles Quadrat wird.

Es sei: $\quad fm (\zeta) = a\zeta^2 + b\zeta + c$

$\quad fn (\zeta) = d$

$$\Psi \text{ fn } (\zeta) = 4d^3 \text{ fm } (\zeta) + \left(\frac{dfm\ (\zeta)}{d\zeta}\right)^2 d^2$$

Wir setzen an:

$$4d \text{ fm } (\zeta) + \left(\frac{dfm\ (\zeta)}{d\zeta}\right)^2 \equiv (\alpha\zeta + \beta)^2$$

$$(16.) \quad 4d\ (a\zeta^2 + b\zeta + c) + (2a\zeta + b)^2 \equiv (\alpha\zeta + \beta)^2$$

Daraus durch Vergleichung der Coefficienten.

$$(17.) \quad \left.\begin{aligned} 4ad + 4a^2 &= \alpha^2 \\ 4bd + 4ab &= 2\alpha\beta \\ 4cd + b^2 &= \beta^2 \end{aligned}\right\}$$

Soll ein Ansatz von der Form (16) möglich sein, so müssen sich die Coefficianten a, b, c, d so bestimmen lassen, dass die durch Elimination von α und β aus (17) resultirende

Gleichung identisch erfüllt wird. Eliminirt man aber α und β aus (17), so erhält man:

$$18., \quad b^2 = 4ac$$

(18.) ist aber die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass fm (ζ) ein vollständiges Quadrat werde. Soll $b = 0$ sein, so muss nach (17) $\alpha^2 \beta^2 = 0$ sein oder:

$$acd\,(a + d) = 0$$

Diese Gleichung wird erfüllt für $c = 0$ oder $a = -d$.

4. $m = 3 \qquad n = 0.$

Φ ist vom 4. Grade. Ψ fn (ζ) muss ein volles Quadrat werden.

Es sei:
$$\text{fm}\,(\zeta) = a\zeta^3 + b\zeta^2 + c\zeta + d$$
$$\text{fn}\,(\zeta) = k$$

Unsere Bedingung wird:

$$4k\ \text{fm}\,(\zeta) + \left(\frac{d\,\text{fm}\,(\zeta)}{d\zeta}\right)^2 \equiv (\alpha\zeta^2 + \beta\zeta + \gamma)^2$$

Die Vergleichung der Coefficienten ergiebt:

$$\alpha^2 = 9a^2$$
$$2\alpha\beta = 4ka + 12ab$$
$$\beta^2 + 2\alpha\gamma = 4kb + 4b^2 + 6ac$$
$$2\beta\gamma = 4kc + 4bc$$
$$\gamma^2 = 4kd + c^2$$

Eliminirt man hieraus $\alpha\beta\gamma$, so resultiren die Gleichungen:

$$\frac{(2k + 6b)^2}{9} + 6a\sqrt{4kd + c^2} = 4kd + 4b^2 + 6ac$$

$$\tfrac{2}{3}(2k + 6b)\sqrt{4kd + c^2} = 4kc + 4bc$$

oder nach $\sqrt{4kd + c^2}$ aufgelöst:

$$(19.,) \begin{cases} 27ac = (3b + k)(3b - k \\ \sqrt{4kd + c^2} = \dfrac{3c\,(k + b)}{k + 3b} \end{cases}$$

Die Gleichungen (19) werden identisch erfüllt für:

$$c = d = 0 \text{ und:}$$
$$k = 3b$$

Die Form von f^2 wird:

$$f^2 = \frac{\text{fm}\,(\zeta)}{\text{fn}\,(\zeta)} = \frac{a\zeta^3 + b\zeta^2}{3b}$$

Damit ist aber die Zahl der möglichen Fälle erschöpft.

Φ ist vom 4. Grade, wenn entweder $n = 4$ oder $m = 3$ ist. Der Grad von ψ. fn (ζ) ist (ausser für den bereits erledigten Fall $m = 3$, $n = 0$) $= 4n + m$. Damit nun ψ. fn (ζ) ein vollständiges Quadrat werde, muss $4n + m$ eine grade Zahl sein. Für $m = 3$ darf also n keinen andern Werth besitzen als 0 und für $n = 4$ darf m nicht ungerade sein. Damit sind 5 Ansätze von der Betrachtung ausgeschlossen. Auch für jeden der noch fehlenden Fälle lässt sich die Unmöglichkeit zeigen. Wir wollen den Nachweis nur noch für die nächstliegenden führen.

Es sei:

$$\text{fm } (\zeta = a \quad \text{fn } (\zeta) = b_1 \zeta + b_0$$

$$\psi \text{ fn } (\zeta) = \{4a (b_1 \zeta + b_0)^3 + a^2 b_1{}^2\} (b_1 \zeta + b_0)$$

Φ ist vom 1. Grad.

Der Ausdruck ψ fn (ζ) müsste 2 gleiche Wurzeln für ζ enthalten, was nur möglich ist, wenn entweder a oder b_1 gleich 0 ist.

Es sei:

$$f^2 = \frac{a\zeta + b}{\zeta + b_1}$$

Hier erhalten wir als Bedingung zwischen den Coefficienten:

$$b = ab_1 \text{ oder } f^2 = a$$

$$\text{oder: } b = 0 \text{ und } ab_1 = 0$$

Es sei:

$$f^2 = \frac{(c_1 \zeta + c_0)^2}{(b_1 \zeta + b_0)^2}$$

Dieser Ansatz würde erfordern:

$$(b_1 \zeta + b_0)^4 + b_1{}^2 (c_1 \zeta + c_0)^2 \equiv (a_2 \zeta^2 + a_1 \zeta + a_0)^2$$

und:

$$b_1{}^4 = a_2{}^2$$

$$4b_1{}^3 b_0 = 2a_1 a_2$$

$$6b_1{}^2 b_0{}^2 + b_1{}^2 c_1{}^2 = a_1{}^2 + 2a_0 a_2$$

$$4b_1 b_0{}^3 + 2b_1{}^2 c_0 c_1 = 2a_0 a_1$$

$$b_0{}^4 + b_1{}^2 c_0{}^2 = a_0{}^2$$

Die Elimination der a liefert die Beziehungen zwischen den b und c:

$$b_0 c_1 = c_0 b_1 \text{ und:}$$

$$c_1 = 0$$

es muss sein entweder

$$\left\{\begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_0 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{oder:} \quad \left\{\begin{matrix} c_1 = 0 \\ b_1 = 0 \end{matrix}\right\}$$

Die gewählte Ansatzform ist also unmöglich.

§ 4. Die Integrale der besonderen Fälle.

Die Formen, welche f^2 nach dem vorigen Paragraphen haben konnte, um unsere Integrale zu elliptischen zu machen, waren:

1. $f^2 = \text{Const.} = a^2$
2. $f^2 = a_1 \zeta + a_0$
3. a) $f^2 = (a_1 \zeta + a_0)^2$
   b) $f^2 = a_0^2 - \zeta^2$
4. $f^2 = a \zeta^3 + \frac{\zeta^2}{3}$

Behandeln wir die aufgestellten Formen der Reihe nach:

1. $f^2 = a^2$ ist die Gleichung des Kreiscylinders. Wir erhalten:

$$dt = \pm \frac{d\zeta}{\sqrt{2g\,(\zeta_0 - \zeta) + v_0^2 \sin^2 \nu}}$$

$$dQ = \pm \frac{v_0 \cos \nu}{a\,g} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{2g\,(\zeta_0 - \zeta) + v_0^2 \sin^2 \nu}}$$

$$= \frac{v_0 \cos \nu}{a}\, dt$$

Hierin ist zur Abkürzung für $q + \omega Q$ gesetzt. In Betreff der Vorzeichen gilt Folgendes: Für wachsende ζ ist $d\zeta$ positiv, also dt positiv, für abnehmende ζ $d\zeta$ negativ, also dt negativ. Es ist also das positive Zeichen für eine steigende, das negative für eine fallende Bewegung des Punktes zu nehmen. Aus der Form von dt ersieht man sofort, dass ζ einen Maximalwerth erreicht für:

$$\zeta = \zeta_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \nu}{2g}$$

Uebersteigt ζ diesen Werth, so wird t und Q imaginär. Bemerkt sei noch, dass es für den Werth des Maximum gleichgültig ist, ob ν positiv oder negativ ist, da sin ν nur im Quadrat vorkommt.

Integriren wir jetzt dt. Wir wählen als untere Integrationsgrenze für ζ seinen Maximalwerth und setzen den Werth von t für den Augenblick, wo der Punkt sein Maximum erreicht, $= 0$, dann erhalten wir:

$$t = \pm \frac{1}{g} \sqrt{2g\,(\zeta_0 - \zeta) + v_0^2 \sin^2 \nu}$$

oder mit Einführung des Maximalwerthes, der mit ζ_1 bezeichnet sein mag:

$$t = \pm \frac{1}{g} \sqrt{2g\,(\zeta_1 - \zeta)} \text{ oder:}$$

$$\frac{gt^2}{2} = \zeta_1 - \zeta$$

„Die Beschleunigung in vertikaler Richtung erfolgt nach den Fallgesetzen."

Ist der Werth von $q + \omega$ für $t = 0$ ebenfalls $= 0$ gesetzt, so wird:

$$Q = \frac{v_0 \cos \nu}{a}\, t = \pm \frac{v_0 \cos \nu}{a\sqrt{g}} \sqrt{2\,(\zeta_1 - \zeta)}$$

Q wächst proportional der Zeit und proportional der Wurzel aus der durchlaufenen Höhe.

$Q = f\,(\zeta_1 - \zeta)$ ist die Gleichung einer Parabel, deren Halbparameter

$$\text{gleich } \frac{v_0^2 \cos^2 \nu}{a^2\, g} \text{ ist.}$$

2. $f^2 = a_1\, \zeta + a_0 =$ die Gleichung des Rotationsparaboloids. Verschiebt man den Anfangspunkt des Systems auf der ζ Axe abwärts um das Stück $\frac{a_0}{a_1}$, so fällt derselbe mit dem Scheitelpunkt des Paraboloids zusammen und wir erhalten einfacher: $f^2 = a_1\, \zeta$, wo a_1 den Parameter bedeutet. t und Q mögen von einem Maximum ζ_1 der vertikalen Axe ab gerechnet werden, dann erhält man:

$$t = \pm \int_{\zeta_1}^{\zeta} \frac{d\zeta \sqrt{\zeta + \frac{a_1}{4}}}{\sqrt{\zeta\,\{2g\,(\zeta_0 - \zeta) + v_0^2\} - \zeta_0\, v_0^2 \cos^2 \nu}}$$

$$Q = \pm \frac{v_0 \cos v}{a_1} \sqrt{\frac{\zeta_0}{a_1}} \int_{\zeta_1}^{\zeta} \frac{d\zeta \sqrt{\zeta + \frac{a_1}{4}}}{\zeta \sqrt{\zeta \{2g(\zeta_0 - \zeta) + v_0^2\} - \zeta_0 v_0^2 \cos^2 v}}$$

Das obere oder untere Vorzeichen ist zu nehmen. je nachdem die Bewegung eine steigende oder fallende ist.

3a. $f^2 = (a_1 \zeta + a_0)^2$ oder einfacher durch Verschiebung des Coordinatensystems:

$$f^2 = a_1^2 \zeta^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha/2 . \zeta^2$$

ist die Gleichung des geraden Kegels mit der Kegelöffnung α.

Hier haben wir:

$$t = \pm \frac{1}{\cos \alpha/2} \int_{\zeta_1}^{\zeta} \frac{\zeta \, d\zeta}{\sqrt{\{2g(\zeta_0 - \zeta) + v_0^2\} \zeta^2 - v_0^2 \cos^2 v \, \zeta_0^2}}$$

$$q + \omega = \pm \frac{v_0 \cdot \cos v . \zeta_0}{\sin \alpha/2} \int_{\zeta_1}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta \sqrt{\{2g(\zeta_0 - \zeta) + v_0^2\} \zeta^2 - v_0^2 \cos^2 v . \zeta_0^2}}$$

Zur Bestimmung der Vorzeichen ist hier einerseits zu berücksichtigen, ob die Bewegung steigt oder fällt, andrerseits ob ζ + oder — ist. t ist positiv, wenn ζ und $d\zeta$ gleiches Vorzeichen haben, also wenn bei steigender Bewegung ζ positiv ist und wenn ζ bei fallender Bewegung negativ ist, in den übrigen Fällen ist t negativ.

Die Bewegungen, welche den Integralen sub 2 und 3a entsprechen, sind von Dr. Voss in seiner Abhandlung im Programm der Schweriner Realschule v. J. 1878 ausführlich behandelt worden. Derselbe findet folgendes:

Die Bewegung findet in beiden Fällen im Allgemeinen zwischen 2 horizontalen Ebenen statt, deren Entfernungen vom Coordinatenanfang sich durch die Anfangsconstanten der Bewegung bestimmen. Die Zeit, welche der Punkt gebraucht, um von der Minimalebene zur Maximalebene zu gelangen und umgekehrt, ist stets dieselbe. ζ ist eine periodische Funktion der Zeit. Q setzt sich zusammen aus einem periodischen und einem nichtperiodischen Theil; Q wächst mit jedem Auf- oder Niedergang stets um dasselbe Stück.

3b. $f^2 = a^2 - \zeta^2$ ist die Gleichung der Kugel. Wir erhalten:

$$t = \pm a \int_{\zeta_1}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(a^2 - \zeta^2)(-2g\zeta - 2\beta) - \alpha^2}}$$

$$Q = \pm \alpha a \int_{\zeta_1}^{\zeta} \frac{d\zeta}{(a^2 - \zeta^2)\sqrt{(a^2 - \zeta^2)(-2g\zeta - 2\beta) - \alpha^2}}$$

Bei steigender Bewegung ist das obere, bei fallender das untere Vorzeichen zu nehmen.

Machen wir noch die Substitution

$$\zeta = a \cos \psi. \quad \text{Dadurch}$$

$$t = \mp \int_{\psi_1}^{\psi} \frac{\sin \psi d\psi}{\sqrt{\sin^2\psi \left(-\frac{2g}{a}\cos\psi - \frac{2\beta}{a^2}\right) - \left(\frac{\alpha}{a^2}\right)^2}}$$

$$Q = \mp \frac{\alpha}{a^2} \int_{\psi_1}^{\psi} \frac{\sin \psi d\psi}{\sin^2\psi \sqrt{\sin^2\psi \left(-\frac{2g}{a}\cos\psi - \frac{2\beta}{a^2}\right) - \left(\frac{\alpha}{a^2}\right)^2}}$$

Diese Gleichungen sind identisch den an manchen Orten, z B. im „Durège, Theorie der elliptischen Functionen", § 74, hergeleiteten. Sie stellen die genugsam erörterten Bewegungsgleichungen des sphärischen Pendels dar.

---

4. $f^2 = r^2 = a\zeta^3 + \frac{\zeta^2}{3}$

(20.) $$r = \pm \zeta \sqrt{a\zeta + 1/3}$$

Suchen wir ein geometrisches Bild von der durch 20., dargestellten Curve zu gewinnen. Zunächst folgt aus dem doppelten Vorzeichen der Wurzel, dass jedem Werthe von ζ zwei absolut gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von r entsprechen. Die Curve wird aus 2 congruenten, symmetrisch zur ζ Axe gelegenen Stücken bestehen. Es genügt, einen

dieser Zweige kennen zu lernen, wir wählen denjenigen, der dem positiven Vorzeichen der Wurzel entspricht.

Es bedeute a eine positive Constante. Damit r reell bleibe, muss sein:

$$\zeta > -\frac{1}{3a} \quad \text{Für } \zeta = -\frac{1}{3a}$$

wird $r = 0$. Liegt ζ zwischen $-\frac{1}{3a}$ und 0, so ist r negativ. Für

$$\zeta = 0 \text{ ist auch } r = 0.$$

Für jedes positive ζ ist r positiv.

Die erste Ableitung von (20.,) lautet:

$$\frac{dr}{d\zeta} = \frac{3a\,\zeta + {}^{2}/_{3}}{2\sqrt{a\zeta + {}^{1}/_{3}}}$$

Für $\zeta = -\frac{1}{3a}$ ist $\frac{dr}{d\zeta} = -\infty$

Die Curve geht vertikal abwärts. So lange $\frac{dr}{d\zeta}$ zwischen $-\frac{1}{3a}$ und $-\frac{2}{9a}$ bleibt, ist $\frac{dr}{d\zeta}$ negativ. Für:

$$\zeta = -\frac{2}{9a} \text{ ist } \frac{dr}{d\zeta} = 0$$

Für diesen Punkt erreicht die Curve einen Culminationspunkt und zwar ein Minimum. Jeder Werth von ζ, der grosser ist als $-\frac{2}{9a}$ liefert ein positives $\frac{dr}{d\zeta}$.

Die zweite Ableitung von (20.,) ist:

$$\frac{d^2r}{d\zeta^2} = \frac{a\,(3a\,\zeta + {}^{4}/_{3})}{4\sqrt{a\,\zeta + {}^{1}/_{3}}^{3}}$$

Dieser Ausdruck wird 0 für $\zeta = -\frac{4}{9a}$; dieser Werth liefert aber keinen reellen Punkt der Curve, dieselbe besitzt also keinen Wendepunkt. Für sämmtliche reelle Curvenpunkte wird $\frac{d^2r}{d\zeta^2}$ positiv.

Die gefundenen Resultate lassen sich in folgendem Satze zusammenfassen:

„Die Curve enthält reelle Punkte nur zwischen $\zeta = -\frac{1}{3a}$ und $+\infty$.

Sie schneidet ζ in den Punkten $-\frac{1}{3a}$ und 0. Die Curve fällt von $\zeta = -\frac{1}{3a}$ bis $\zeta = -\frac{2}{9a}$, wo sie ein Minimum erreicht, von da ab steigt sie. Sie kehrt ununterbrochen die convexe Seite nach oben."

Die Gestalt der Curve ist dementsprechend die in Fig. II. dargestellte.

Ist a eine negative Constante, so wird:

$$r^2 = -a\zeta^3 + \frac{\zeta^2}{3}$$

Vertauscht man ζ mit $-\zeta$, so erhält man:

$$r^2 = a\zeta^3 + \frac{\zeta^2}{3},$$

das heisst, denselben Werth wie für $+a$. Die Curve für $-a$ wird sich von der für $+a$ nur dadurch unterscheiden, dass sie in Bezug auf die Richtung der ζ Axe die umgekehrte Lage hat. —

Die Integrale der Bewegung werden hier:

$$(21.)\quad \begin{cases} t = \pm \frac{1}{2} \int_{\zeta_1}^{\zeta} \frac{\zeta\,(3a\zeta + \frac{4}{3})\,d\zeta}{\sqrt{\Phi}} \\ q + \omega = \pm \frac{\zeta_0 \sqrt{a\zeta_0 + \frac{1}{3}}\,|\ v_0 \cos \nu}{2} \int_{\zeta_1}^{\zeta} \frac{(3a\zeta + \frac{4}{3})\,d\zeta}{\zeta\,(a\zeta + \frac{1}{3})\sqrt{\Phi}} \\ \Phi = \zeta^2 (a\zeta + \frac{1}{3})\,[2g\,(\zeta_0 - \zeta) + v_0^2] - \zeta_0^2\,(a\zeta_0 + \frac{1}{3})\,v_0^2 \cos \nu^2 \end{cases}$$

Ueber ζ_1 steht die Verfügung noch frei. t und $q + \omega$ sind von ζ_1 an gerechnet. Hinsichtlich des Vorzeichens von t bemerken wir, dass das obere oder untere zu nehmen ist, je nachdem

$z = \zeta\,(3a\zeta + \frac{4}{3})$ und $d\zeta$ gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben. z ist positiv für jedes positive ζ und für $\zeta < -\frac{4}{9a}$, negativ für:

$0 < \zeta > -\frac{4}{9a}$. Daraus ersieht man leicht die Regel.

Aus (21.) folgt:

$$(22.)\quad \begin{cases} \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = \frac{4\,\Phi}{\{\zeta\,(3a\zeta + \frac{4}{3})\}^2} \text{ und:} \\ \frac{dQ}{dt} = \frac{\zeta_0 \sqrt{a\zeta_0 + \frac{1}{3}}\, v_0 \cos \nu}{r^2} \end{cases}$$

ζ' kann Maxima oder Minima erreichen für $\zeta = \infty$ und für die Wurzeln von Φ. Ob die Bahn des Punktes eine zwischen gewissen horizontalen Ebenen beschränkte oder eine unbeschränkte ist, hängt von der Beschaffenheit der Wurzeln von Φ ab. Sind 2 Wurzeln reell, zwei imaginär, so findet das erstere statt, sind alle Wurzeln imaginär, so ist kein endliches, begrenztes Bewegungsgebiet vorhanden. Φ enthält aber sicher 2 reelle Wurzeln, denn für $\zeta = \zeta_0$ ist Φ positiv, für $\zeta = +\infty$ negativ, wobei, wie auch oben, a als positiv vorausgesetzt ist.

Was Q anbetrifft, to ersieht man aus (22.), dass $\frac{dQ}{dt}$ nie das Vorzeichen ändern kann, da r nur im Quadrat auftritt. Q erreicht kein Maximum oder Minimum, sondern wächst unbegrenzt.

Eine weitere Behandlung der Integrale (21.) mag hier übergangen werden.

§ 5. Behandlung des Problems für den allgemeinen Fall: $F(r, \zeta) = 0$.

Die Gleichung der Rotationsoberfläche sei jetzt allgemein:

$$(23.)\quad F(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \zeta) = F(r, \zeta) = 0.$$

$F(\eta, \zeta) = 0$ die Gleichung der erzeugenden Curve.

Die Gleichung der lebendigen Kraft ist wie früher:

$2T = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + \omega'^2(\xi^2 + \eta^2) - 2\omega'(\eta\xi' - \eta'\xi)$

Als unabhängige Variable wollen wir wieder r und q einführen:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= r\cos q\\ \eta &= r\sin q\end{aligned}\right\}\ \text{Dadurch:}$$

$$\xi'^2 + \eta'^2 = r'^2 + r^2 q'^2$$
$$\xi^2 + \eta^2 = r^2$$
$$\eta\xi' - \eta'\xi = -r^2 q'$$

Es bleibt noch ζ auszudrücken als Function von F und r. Zu dem Ende leiten wir F nach t ab:

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{d\zeta}{dt} + \frac{\partial F}{\partial r}\frac{dr}{dt} = 0.\ \text{Daraus:}$$

$$(24.)\quad \begin{cases}\zeta' = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial r} : \dfrac{\partial F}{\partial \zeta}\right) r' \text{ und:}\\ \zeta = -\displaystyle\int_{r_1}^{r}\left(\frac{\partial F}{\partial r} : \frac{\partial F}{\partial \zeta}\right) dr\end{cases}$$

wo r_1 den Werth von r bedeuten soll, für welchen ζ verschwindet.

Durch Substitution der Werthe aus (24.) wird:

$$2T = r'^2\left(1 + \left(\frac{\partial F}{\partial r} : \frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)^2\right) + r^2 q'^2 + \omega'^2 r^2 + 2\omega' r^2 q' \text{ und:}$$

$$2U = -2g\zeta = 2g\int_{r_1}^{r}\left(\frac{\partial F}{\partial r} : \frac{\partial F}{\partial \zeta}\right) dr$$

$$2H = 2T_2 - 2T_0 - 2U$$

$$= r'^2\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial r} : \frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)^2\right] + r^2 q'^2 - \omega'^2 r^2 - 2g\int_{r_1}^{r}\left(\frac{\partial F}{\partial r} : \frac{\partial F}{\partial \zeta}\right) dr$$

Ferner ist:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial r'} &= r'\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial r} : \frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)^2\right] = \frac{\partial V}{\partial r}\\ \frac{\partial T}{\partial q'} &= r^2 q' + \omega' r^2 = \frac{\partial V}{\partial q}\end{aligned}\right\}\ \text{oder:}$$

$$r' = \frac{\partial V}{\partial r} \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial r} : \frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)^2}$$

$$q' = \frac{\partial V}{\partial q} \frac{1}{r^2} - \omega'$$

Diese Werthe in die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung:

$$2 \frac{\partial V}{\partial t} + 2 H = 0 \text{ substituirt giebt:}$$

$$\left.\begin{aligned} 2 \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial r} : \frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^2}{r^2} - 2\omega' \frac{\partial V}{\partial q} \\ - 2g \int_{r_1}^{r} \left(\frac{\partial F}{\partial r} : \frac{\partial F}{\partial \zeta}\right) dr = 0 \end{aligned}\right\} \quad (25.)$$

Diese Differentialgleichung ist einer weiteren Behandlung alsdann fähig, wenn:

$$\frac{\partial F}{\partial r} : \frac{\partial F}{\partial \zeta} = \varphi (r) \quad (26.)$$

= einer Function von r allein ist oder doch mit Hilfe von (23.) dazu gemacht werden kann.

Mit Hilfe von (26.) geht (25.) über in

$$2 \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2}{1 + (\varphi\ r)^2} + \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^2}{r^2} - 2\omega' \frac{\partial V}{\partial q} - 2g \int_{r_1}^{r} \varphi (r)\ dr = 0. \quad (25b.)$$

Dieser Gleichung wird genügt durch den Ansatz:

$$V = \alpha (q + \omega) - \beta t + \Psi (r), \quad (27.)$$

wo α und β willkürliche Constante, Ψ eine noch zu bestimmende Function von r allein bedeutet. Die Substitution von (27.) in (25b.) liefert:

$$d\,\Psi\,(r) = \frac{dr}{r}\sqrt{\Phi\left(1 + (\varphi\,(r)\,)^2\right)}$$

$$\Phi = r^2\,(2g\int_{r_1}^{r}\varphi\,(r)\,dr + 2\beta) - \alpha^2$$

Die Bewegungsgleichungen werden nun:

$$(28.)\quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \alpha} = c_1 = q + \omega \pm \alpha\int_{r_1}^{r}\frac{dr}{r}\sqrt{\frac{1 + (\varphi\,(r)\,)^2}{\Phi}} \\ \frac{\partial V}{\partial \beta} = c_2 = t \pm \int_{r_1}^{r} r dr\sqrt{\frac{1 + (\varphi\,(r)\,)^2}{\Phi}} \end{cases}$$

Wäre uns gegeben worden:

$$\frac{\partial F}{\partial r} : \frac{\partial F}{\partial \zeta} = \frac{1}{\varphi_1\,(\zeta)}$$

so hätten wir Q und t als Functionen von ζ ausdrücken können.

Es wäre:

$$\int_{r_1}^{r}\varphi\,(r)\,dr = \zeta$$

$$dr = -\varphi_1\,(\zeta)\,d\zeta$$

Dadurch gingen die Gleichungen (28.) über in:

$$c_1 = Q \pm \alpha\int_{\zeta_1}^{\zeta}\frac{\varphi_1\,(\zeta)\,d\zeta}{\int_{\zeta_1}^{\zeta}\varphi_1\,(\zeta)\,d\zeta}\sqrt{\frac{1 + (\varphi_1\,(\zeta)\,)^2}{\Phi}}$$

$$c_2 = t \pm \int_{\zeta_1}^{\zeta}\varphi_1\,(\zeta)\,d\zeta\left\{\int_{\zeta_1}^{\zeta}\varphi_1\,(\zeta)\,d\zeta\right\}\sqrt{\frac{1 + (\varphi_1\,(\zeta)\,)^2}{\Phi}}$$

$$\Phi = \left\{\int_{\zeta_1}^{\zeta}\varphi_1\,(\zeta)\,d\zeta\right\}^2(2g\,\zeta + 2\beta) - \alpha^2$$

Man sieht, dass die in r ausgedrückten Gleichungen durch ihre grössere Einfachheit den Vorzug verdienen.

Wir hatten oben angesetzt:

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} = \frac{1}{\varphi\,(r)}\,\frac{\partial F}{\partial r}. \quad \text{Setzt man:}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} = \chi\,(\zeta,\ r) = \varphi\,(r)\,\frac{\partial F}{\partial r} \tag{29a.}$$

so folgt:

$$F = \int^{\zeta} \chi\,(\zeta,\ r)\,d\zeta + \lambda\,(r) = \int^{r} \frac{\chi\,(\zeta,\ r}{\varphi\,(r)}\,\partial r + \mu\,\zeta$$

Diese Gleichung ist eine identische. Sie bleibt richtig, wenn man ζ und r gleich willkürlichen Constanten, etwa resp. gleich a und b setzt.

Dadurch wird:

$$\left.\begin{aligned} \lambda\,(r) &= \int^{r} \frac{\chi\,(a,\ r)}{\varphi\,(r)}\,\partial r + \mu\,(a) \\ \mu\,(\zeta) &= \int^{\zeta} \chi\,(\zeta,\ b)\,\partial\zeta + \lambda\,(b) \end{aligned}\right\} \text{und}$$

$$\left.\int^{\zeta} \Big(\chi\,(\zeta,\ r) - \chi\,(\zeta,\ b)\Big)\,\partial\zeta = \int^{r} \Big(\chi\,(\zeta,\ r) - \chi\,(a,\ r)\Big)\frac{\partial r}{\varphi\,(r}\right\} \tag{29b.}$$

$$+ \lambda\,(b) - \mu\,(a)$$

Ueber die Constanten a und b können wir willkürlich verfügen, etwa auch so, dass $\lambda\,(b)$ und $\mu\,(a)$ verschwinden. (29b.) ist die entsprechende Integralform der gegebenen Bedingung (29a.) Jedes F, dass (29a.) genügen soll, muss (29b.) identisch erfüllen.

Eine noch kürzere Integralform erhält man wegen:

$$\frac{d\zeta}{dr} = -\frac{\partial F}{\partial r} : \frac{\partial F}{\partial \zeta} = -\varphi\,(r)$$

nämlich: $$\zeta = -\int_{r_1}^{r} \varphi\,(r)\,dr$$

Constantenbestimmung.

Die Constanten α und β werden bestimmt durch die Gleichungen:

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta V}{\delta r} = r'\left(1 + (\varphi\,(r))^2\right) \qquad \dfrac{\delta V}{\delta q} = r^2\,(q+\omega)' \\ V = \alpha\,(q+\omega) - \beta t + \displaystyle\int^{r} \frac{dr}{r}\sqrt{\Phi\left(1 + (\varphi\,(r))^2\right)} \\ \Phi = r^2\left[2\beta - 2g\displaystyle\int_{r_1}^{r} \varphi\,(r)\,dr\right] - \alpha^2 \end{cases}$$

Dieselben ergeben:

$$r^2\,(q+\omega)' = \alpha \text{ und:}$$

$$(rr')^2\left(1 + (\varphi\,(r))^2\right) = r^2\left(2\beta + 2g\int_{r_1}^{r} \varphi\,(r)\,dr\right) - \alpha^2$$

Im Anfangszustand möge:

$r = r_0 \quad q = q_0 \quad \omega = \omega_0$ sein. Alsdann haben wir:

$$r_0^2\,(q_0+\omega_0)' = \alpha \text{ und:}$$

$$r_0'^2\left(1 + (\varphi\,(r_0))^2\right) = 2\beta + 2g\int_{r_1}^{r_0} \varphi\,(r)\,dr - r_0^2\,(q_0+\omega_0)'^2$$

Die Anfangsgeschwindigkeit sei wieder v_0; wir legen durch den Anfangspunkt der Bewegung und die ζ Axe eine Ebene nnd errichten im Anfangspunkt der Bewegung das Loth auf dieselbe; eine Ebene gelegt durch v_0 und dies Loth markirt eine Gerade in der Vertikalebene; nach dieser und dem Loth nehmen wir die Componenten von v_0; γ bedeute den Winkel von v_0 gegen das Loth, δ den Winkel der nicht horizontalen Componente gegen die Vertikale. Man hat:

$$a = r_0 \, v_0 \cos \gamma$$

$$2\beta = -2g \int_{r_1}^{r_0} \varphi(r) \, dr + v_0^2 \cos^2 \gamma + r_0'^2 \left(1 + (\varphi(r_0))^2\right)$$

Wegen $\frac{d\zeta}{dr} = -\varphi(r)$ ist:

$$(\varphi(r_0))^2 = \zeta_0'^2 : r_0'^2 \text{ und:}$$

$$r_0'^2 \left(1 + (\varphi(r_0))^2\right) = r_0'^2 + \zeta_0'^2 = v_0^2 \sin^2 \gamma$$

Dadurch wird:

$$\left.\begin{aligned} 2\beta &= -2g \int_{r_1}^{r_0} \varphi(r) \, dr + v_0^2 \\ a &= r_0 \, v_0 \cos \gamma \end{aligned}\right\}^{*} \quad (31.)$$

§ 6. Specielle Formen der Function $\varphi(r)$.

Wir haben jetzt zu untersuchen, für welche Werthe von $\varphi(r)$ unsere Integrale dem Calcule am zugänglichsten sind. Folgende Ansätze liefern uns elliptische Integrale:

$$(32.) \quad \begin{cases} 1. \ \varphi(r) = c \\ 2. \ \varphi(r) = cr \end{cases}$$

Wir betrachten zunächst den ersten Fall. Unsere Gleichungen (28.) gehen über in:

$$(33.) \quad \begin{cases} Q = \pm a \sqrt{1 + c^2} \int_{r_2}^{r} \frac{dr}{r \sqrt{\varphi}} \\ t = \pm \sqrt{1 + c^2} \int_{r_2}^{r} \frac{r dr}{\sqrt{\varphi}} \\ \Phi = r^2 \{2gc(r - r_1) + 2\beta\} - a^2 \end{cases}$$

* conf. Figur I, den Winkeln μ und ν entsprechen δ und γ.

r_2 bedeutet einen noch disponiblen Werth von r, für den t und Q verschwinden. Für $c = 0$ erhalten wir die Bewegungsgleichungen auf dem Cylinder. Die Constanten werden:

$$\alpha = r_0 \, v_0 \cos \gamma$$

$$2\beta = v_0^2 - 2gc \, (r_0 - r_1) \text{ und:}$$

(34.) $$\Phi = r^2 \, (v_0^2 + 2gc \, (r - r_0)) - r_0^2 \, v_0^2 \cos^2 \gamma.$$

Im zweiten Falle erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} Q &= \pm \alpha \int_{r_2}^{r} \frac{d\,(r^2)}{2r^2} \sqrt{\frac{1 + c^2 r^2}{\Phi}} \\ t &\pm \int_{r_2}^{r} \frac{d\,(r^2)}{2} \sqrt{\frac{1 + c^2 r^2}{\Phi}} \\ \Phi &= r^2 \, \{cg \, (r^2 - r_1^2) + 2\beta\} - \alpha^2 \end{aligned}\right\} \text{(35.)}$$

Auch diese Gleichungen führen für $c = 0$ auf den Cylinder. 2β wird:

$$2\beta = v_0^2 - gc \, (r_0^2 - r_1^2) \text{ und:}$$

(36.) $$\Phi = r^2 \, \{gc \, (r^2 - r_0^2) + v_0^2\} - r_0^2 \, v_0^2 \cos^2 \gamma.$$

Die Gleichungen (32.) führen auf elliptische Integrale der 2. und 3. Gattung für die Variable r, (35.) ebenfalls, aber für die Variable r^2.

Es mögen jetzt Formen von Oberflächen aufgesucht werden, die den Bedingungen

(37a.) $$\frac{\partial F}{\partial r} = c \frac{\partial F}{\partial \zeta} \text{ oder } \frac{\partial F}{\partial r} = cr \frac{\partial F}{\partial \zeta}$$

genügen und zwar solche von möglichst allgemeinem analytischem Charakter. Aus: $\frac{d\zeta}{dr} = -\varphi(r)$ folgt, wenn $\varphi(r) = c$ und $= cr$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= -cr + c_1 \\ \zeta &= -cr^2 + c_2 \end{aligned}\right\} \text{(37b.)}$$

Die erstere Form enthält Kegel und Kugel, die zweite das Rotationsparaboloid.

Versuchen wir Ansätze allgemeineren Charakters und zwar folgende zwei:

(38a.) $F(r, \zeta) = \zeta^n f_n(r) + \zeta^{n-1} f_{n-1}(r) + \ldots \zeta f_1(r) + f_0(r)$

$$= \sum_0^n k\ \zeta^k f_k(r) = 0 \text{ und:}$$

(38b.) $F(r, \zeta) = \varphi_n(\zeta)\,\psi_n(r) + \varphi_{n-1}(\zeta)\,\psi_{n-1}(r) + \ldots \varphi_0(\zeta)\,\psi_0(r)$

$$= \sum_0^n k\ \varphi_k(\zeta)\ \psi_k(r) = 0.$$

Der Ansatz (38a.) liefert:

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} = \sum_1^n k.\ k.\ \zeta^{k-1} f_k(r) = \sum_0^{n-1} k\ (k+1)\ \zeta^k\ f^{k+1}(r)$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \sum_0^n k\ \zeta^k\ \frac{df_k(r)}{dr}$$

Mit Hilfe von (26):

$$\sum_0^{n-1} k\ \zeta^k \left\{ (k+1)\ f_{k+1}(r) - \frac{1}{\varphi(r)} \frac{df_k(r)}{dr} \right\} = \frac{\zeta^n}{\varphi(r)} \frac{df_n(r)}{dr}$$

Dieser Gleichung wird identisch genügt, wenn ich die f durch folgendes System von n + 1 Gleichungen definire:

$$\frac{1}{\varphi(r)} \frac{df_k(r)}{dr} = (k+1)\ f_{k+1}(r) \quad k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$$

$$\frac{1}{\varphi(r)} \frac{df_n(r)}{dr} = 0$$

Soll $\varphi(r)$ nicht gleich unendlich sein, so folgt aus der letzten dieser Gleichungen:

$$f_n(r) = a_n + 1$$

Die übrigen f haben sämmtlich folgende Form:

$$f_k(r) = (k+1) \int f_{k+1}(r) \cdot \varphi(r)\, dr + a_{k+1}$$

Mit Benutzung des Werthes von $f_n(r)$ erhält man die übrigen f leicht der Reihe nach:

$$f_{n-1}(r) = a_n + n\ a_{n+1} \int \varphi(r)\, dr$$

$$f_{n-2}(r) = a_{n-1} + (n-1)\ a_n \int dr.\ \varphi(r) + n\ (n-1)\ a_{n+1} \overset{(2)}{\int} dr.\ \varphi(r)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_m(r) = \alpha_{m+1} + \ldots + (n-2)(n-1)\ldots(m+1)\,\alpha_{n-1}\int^{(n-m-2)} dr.\,\varphi(r)$$

$$+ (n-1)(n-2)\ldots(m+1)\,\alpha_n \int^{(n-m-1)} dr\,.\,\varphi(r)$$

$$+ n(n-1)(n-2)\ldots(m+1)\,\alpha_{n+1}\int^{(n-m)} dr\,.\,\varphi(r)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_0(r) = \alpha_1 + \ldots\ldots + (n-1)(n-2)\ldots\alpha_n \int^{(n-1)} dr\,.\,\varphi(r)$$

$$+ n(n-1)(n-2)\ldots C_n \int^{(n)} dr\,.\,\varphi(r)$$

$\int^{(2)} \varphi(r)\,dr$ ist zur Abkürzung gesetzt für:

$$\int \left\{ \int \varphi(r)\,dr \right\} \varphi(r)\,dr \quad \text{etc.}$$

Die Constanten α sind willkürlich. Für $\varphi(r) = c$ erhält man:

$$(39.) \qquad \sum_0^n k\ \alpha_{k+1}(\zeta + cr)^k$$

und für $\varphi(r) = cr$:

$$(40.) \qquad \sum_0^n k\ \alpha_{k+1}(\zeta + cr^2)^k$$

Die Gleichungen (39.) und (40.) stellen Curvensysteme dar, deren Formen sind:

$$\zeta + cr = \beta_k$$
$$\zeta + cr^2 = \gamma_k$$

Dieselben haben wir bereits oben kennen gelernt.

Wir setzen zweitens an:

$$F(r, \zeta) = \sum_{0}^{n} k \; \varphi_k(\zeta) \; \psi_k(r) = 0.$$

Wir erhalten:

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} = \sum_{0}^{n} k \; \frac{d\varphi_k(\zeta)}{d\zeta} \; \psi_k(r) \text{ und:}$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \sum_{0}^{n} k \; \varphi_k(\zeta) \; \frac{d\psi_k(r)}{dr}; \text{ also}$$

$$\sum_{0}^{n} k \left\{ \frac{d\varphi_k(\zeta)}{d\zeta} \; \psi_k(r) - \frac{\varphi_k(\zeta)}{\varphi(r)} \; \frac{d\psi_k(r)}{dr} \right\} = 0.$$

Diesem Ausdrucke wird genügt durch:

$$\frac{d\varphi_k(\zeta)}{d\zeta} \; \psi_k(r) = \frac{\varphi_k(\zeta)}{\varphi(r)} \; \frac{d\psi_k(r)}{dr} \qquad k = 0, 1, \ldots n.$$

$$\frac{d \lg (\varphi_k(\zeta))}{d\zeta} = \frac{1}{\varphi(r)} \; \frac{d \lg \psi_k(r)}{dr}$$

Die linke Seite ist Funktion von ζ allein, die rechte von r allein, beide müssen gleich derselben Constanten α_k sein:

$$\varphi_k(\zeta) = e^{\alpha_k \zeta + \beta_k}$$

$$\psi_k(r) = e^{\alpha_k \int dr \, . \, \varphi(r) + \gamma_k}$$

$$F(r, \zeta) = \sum_{0}^{n} k \; a_k \; e^{\alpha_k (\zeta + \int \varphi(r) \, dr)}$$

Für die speciellen Werthe von $\varphi(r)$ erhalten wir:

$$(41.) \quad \begin{cases} F = \sum_{0}^{n} k \; a_k \; e^{\alpha_k (\zeta + cr)} \text{ und:} \\ \\ F = \sum_{0}^{n} k \; a_k \; e^{\alpha_k \left(\zeta + \frac{cr^2}{2}\right)} \end{cases}$$

F wird ein Aggregat von Exponentialfunktionen, die als variablen Theil im Exponenten die schon mehrfach erhaltene Form besitzen.

Aus den bis dahin gewonnenen Resultaten kann man nun leicht auf die allgemeinsten Functionen F schliessen, welche den Bedingungen (37) genügen. Es sind:

$$\left.\begin{aligned} &F\ (\zeta + cr) = 0 \quad \text{und:} \\ &F\ \left(\zeta + \frac{cr^2}{2}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (42.)$$

Es darf F beidemale nur von einem einzigen Argumente abhängig sein, das im ersten Falle $= \zeta + cr$, im zweiten $= \zeta + \frac{cr^2}{2}$ ist.

Die Richtigkeit der Behauptung ist leicht durch Differentiation zu beweisen.

Die Gleichungen (42.) können nach ihrem Argumente aufgelöst werden. Man erhält ein System von endlich oder unendlich vielen Curven, letzteres — wenn F transscendente Funktionen enthält —, deren jede durch die Gleichungen (37b.) ausgedrückt ist.

Im Falle: $$\frac{\partial F}{\partial \zeta}\ \varphi\ (r) = \frac{\partial F}{\partial r}$$

erhält man als allgemeinste Lösung:

$$F\ (\zeta + \int_{r_1}^{r} \varphi\ (r(\ dr) = 0.$$

§ 7. **Specialisirung der Funktion** ω.

Wir wollen uns im Folgenden ω als specielle Funktion der Zeit gegeben denken und die Bewegung des Punktes gegen das relative System betrachten. Dabei wird sich t als Funktion von ζ oder r nicht ändern, während wir an Stelle von Q — dem Winkel, der durch den bewegten Punkt und die x Axe bestimmt ist — den Winkel q als Funktion der genannten Grössen erhalten, indem wir von Q den Werth von ω in Abzug bringen. Die Drehung der Fläche geschehe im positiven Sinne, wenn sie erfolgt in der Richtung von der + x zur + y Axe, also in demselben Sinne wie q gerechnet wurde.

Wir wollen uns auf die Betrachtung einiger specieller Fälle — den Cylinder und die Kugel — beschränken.

Für den Cylinder war:

$$t = \pm \frac{1}{g} \sqrt{2g\,(\zeta_1 - \zeta)}$$

$$Q = \pm \frac{v_0 \cos \nu}{ag} \sqrt{2g\,(\zeta_1 - \zeta)}$$

wo ζ_1 das Maximum von ζ bedeutet.

Es sei ω proportional der Zeit

$$\omega = \alpha t.$$ Man erhält:

$$(43.) \qquad q = \pm \left(\frac{v_0 \cos \nu}{ag} - \frac{\alpha}{g} \right) \sqrt{2g\,(\zeta_1 - \zeta)}.$$

ν sei positiv gerechnet, wenn die Richtung der Componente $v_0 \cos \nu$ im Sinne von $+\xi$ nach $-\eta$ geht, im umgekehrten Falle negativ.

Aus (43) ersieht man leicht folgendes Gesetz:

Geschieht die Drehung nach der Seite, wohin die horizontale Anfangsgeschwindigkeit gerichtet ist, so wird, falls $\alpha a < v_0 \cos \nu$, q absolut genommen kleiner sein als Q.

Wenn $\alpha a = v_0 \cos \nu$, das heisst, wenn der Cylinder im Sinne der horizontalen Componente der Anfangsgeschwindigkeit gedreht wird mit einer der letzteren gleichen Winkelgeschwindigkeit, so erhalten wir $q = 0$, der Punkt beschreibt eine gerade Linie gegen den Cylinder. Ist $\alpha a > v_0 \cos \nu$, so schlägt q in die Q entgegengesetzte Richtung um; q wird $= -Q$, wenn $\alpha a = 2 v_0 \cos \nu$ etc. Geschieht die Drehung im entgegengesetzten Sinne der horizontalen Anfangsgeschwindigkeit, so ist der absolute Werth von q stets grösser als Q.

Es sei zweitens ω eine quadratische Funktion der Zeit von der Form:

$$\omega\,(t) = \alpha t - \beta t^2$$

Dadurch resultirt:

$$q = \pm \left(\frac{v_0 \cos \nu}{ag} - \frac{\alpha}{g} \right) \sqrt{2g\,(\zeta_1 - \zeta) + \frac{2\beta\,(\zeta_1 - \zeta)}{g}}$$

Für den speciellen Fall:

$\alpha a = v_0 \cos \nu$ wird:

$$q = \frac{2\beta\,(\zeta_1 - \zeta)}{g}$$

oder wenn man:

$$\frac{g}{2\beta} = k \text{ und } \zeta_1 - \zeta = Z \text{ setzt.}$$

$$(44.) \quad \begin{cases} Z = kq \text{ und:} \\ \operatorname{tg} q = y/x = \operatorname{tg} Z/k \end{cases}$$

Dies sind die Gleichungen der Schraubenfläche.

„Der Punkt wird eine Schraubenfläche gegen den Cylinder beschreiben, wenn ω den Werth besitzt:

$$\omega = \frac{v_0 \cos \nu}{a} t - \beta t^2$$

wo β willkürlich ist. —

Die Gleichungen für das sphärische Pendel lauten vollständig integrirt: *

$$t = k \sqrt{\frac{2r}{g(\cos\beta - \cos\alpha)}} \; u = M \cdot u \text{ und:}$$

$$Q = \frac{\Phi}{T} t + \tfrac{1}{2} i \lg \frac{\Theta(u - ia_1)\,\Theta(u - ia_2 - K)}{\Theta(u + ia_1)\,\Theta(u + ia_2 + K)}$$

Φ bedeutet eine von t unabhängige Funktion, T die halbe Schwingungsdauer. Der Ausdruck für Q in (45) besteht aus einem ersten, nicht periodischen, der Zeit proportionalen und einem zweiten periodischen Theil. Für $t = 0$ oder gleich einem ganzen Vielfachen von T verschwindet das periodische Glied. Es erreicht für diese Werthe ψ (der Winkel des Pendels gegen die z Axe) abwechselnd Maxima und Minima.

Für $t = 0$ ist $Q = 0$; mit jedem Zeitintervall T, welches das Pendel braucht, um von einem tiefsten zu einem höchsten Punkte zu gelangen und umgekehrt, wächst Q stets um den Werth Φ. Die gleichzeitigen Werthe von t ψ Q bilden demgemäss folgendes Schema:

$$\begin{array}{llllll} t = 0 & T & 2T & 3T & \ldots\ldots \\ \psi = \alpha & \beta & \alpha & \beta & \ldots\ldots \\ Q = 0 & \Phi & 2\Phi & 3\Phi & \ldots\ldots \end{array}$$

Wir setzen wieder an: $\omega = \alpha t$ und erhalten:

$$(46.) \quad q = \frac{\Phi - \alpha T}{T} t + \tfrac{1}{2} i \frac{\lg \Theta(u - ia_1)\,\Theta(u - ia_2 - K)}{\Theta(u + ia_1)\,\Theta(u + ia_2 + K)}$$

* conf.: Durège, Theorie der elliptischen Funktionen, Abschnitt XIX.

Wir können α so wählen, dass der nichtperiodische Theil, das Wachsthum von q nach jeder Periode, verschwindet und q eine rein periodische Funktion der Zeit wird. Damit vereinfacht sich die Pendelbewegung wesentlich.

Im ursprünglichen Falle liefert die horizontale Projection des sphärischen Pendels das Bild III.; r_1 und r_0 bedeuten den Maximal- und Minimalkreis, zwischen denen sich das Pendel hin und her bewegt. Der vereinfachte Fall ist in Figur IV. dargestellt.

Ist αT nicht $= \Phi$, so hat unsere Drehung den Einfluss, dass sie das Wachsthum von q nach jeder Periode verlangsamt oder beschleunigt; ersteres findet Statt, wenn αT und Φ gleiches, letzteres, wenn sie entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Im ersteren Falle wird, wenn $\alpha T > \Phi$, das Fortschreiten des höchsten Punktes des sphärischen Pendels auf dem Kugelkreis r_0 in der Bewegungsrichtung übergehn in ein Rückwärtsschreiten.

Endlich wollen wir auch hier noch ansetzen:

$$\omega = \alpha t^2 + \beta t.$$

Dadurch wird:

$$q = \frac{\Phi - \beta T}{T} t - \alpha t^2 + \tfrac{i}{2} \lg \frac{\Theta(u - ia_1)\,\Theta(u - ia_2 - K)}{\Theta(u + ia_1)\,\Theta(u + ia_2 + K)}$$

Bringt man wieder den Faktor von t durch die Annahme $\Phi = \beta T$ zum Verschwinden, so reducirt sich der nichtperiodische Theil von q auf einen zu t^2 proportionalen Ausdruck. Für $t = 0, T, 2T, 3T$ etc. erhält man: $q = 0, -\alpha T^2, -4\alpha T^2$ etc.

„Der Werth, den Φ nach der Zeit n T, wo n eine ganze Zahl bedeutet, erreicht, ist proportional mit n^2.

Die Richtung des Fortschreitens richtet sich nach dem Vorzeichen von α.“

§ 8. Schlussbetrachtung.

Das von uns im Vorstehenden behandelte Problem ist ein specieller Fall des allgemeineren:

„Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einfluss von beliebigen Kräften auf einer bewegten Oberfläche.“

Wir specialisirten die Oberfläche als eine Rotationsoberfläche und erreichten damit den Vortheil, die rechtwinkligen Coordinaten auf einfache Weise in unabhängigen Variablen ausdrücken zu können. Die Annahme, dass die Kräfte parallel der z Axe wirken und constant sein sollten, machte die Kräftefunktion U frei von x und y und zu einer linearen Funktion von z. Wir beschränkten die Bewegung auf eine Rotation um die Axe; dadurch blieb ζ als Funktion der Zeit unverändert, q änderte sich nur um eine additiv hinzutretende Funktion der Zeit; die Beziehung zwischen absolutem und relativem System blieb also eine sehr einfache.

Es giebt noch andere Arten von Bewegungen unserer Fläche, bei denen — die übrigen Annahmen ungeändert gelassen — das Problem auf blosse Quadraturen zurückgeführt werden kann. Man darf der Fläche neben der Axenrotation noch eine Fortbewegung in der Richtung der z Axe mit constanter Beschleunigung gestatten. Dieser Fall mag noch kurz behandelt werden. Die z Coordinate in Bezug auf das relative System sei wieder ζ, dann erhält man für eine beliebige Art der Verschiebung der z Axe die Beziehung

$$z = \zeta + \Omega\,(t) \tag{47.}$$

$z' = \zeta' + \Omega'\,(t)$. Man erhält:

$$U = -2g\,(\zeta + \Omega\,(t))$$

$$2T \text{ (siehe 4)} = \zeta'^2\left(1 + \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2\right) + f^2\,q'^2 + 2f^2\,q'\,\omega' + f^2\,\omega'^2 + 2\zeta'\,\Omega'\,(t) + (\Omega'\,(t))^2.$$

$$2\frac{\delta V}{\delta t} + 2H = 2\frac{\delta V}{\delta t} + 2T_2 - 2T_0 - 2U = 0$$

$$= 2\frac{\delta V}{\delta t} + \zeta'^2\left(1 + \frac{df}{d\zeta}\right)^2\Big) + f^2\,q'^2 - f^2\,\omega'^2 + 2g\,\zeta + 2g\,\Omega\,(t) - (\Omega'\,(t))^2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta T}{\delta \zeta'} = \zeta'\left(1 + \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2\right) + 2\Omega'\,(t) &= \frac{\delta V}{\delta \zeta} \\ \frac{\delta T}{dq'} = f^2\,(q' + \omega') &= \frac{\delta V}{\delta q} \end{aligned}\right\} \tag{48.}$$

Eliminirt man mit Hilfe von (48.) die Differentialquotienten, so kommt:

$$0 = 2\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial \zeta} - 2\Omega' t\right)^2}{1 + \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2} + \left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^2 \frac{1}{f^2}$$

$$- 2\omega' \frac{\partial V}{\partial q} + 2g\zeta - \Omega'(t)^2 + 2g\,\Omega(t)$$

Dieser Ausdruck geht durch den Ansatz:

$$V = \alpha(q + \omega) + \chi(t) + \varphi(\zeta)$$

über in:

$$(49.)\quad \left\{ 0 = \frac{\left(\frac{d\varphi(\zeta)}{d\zeta} - 2\Omega' t\right)^2}{1 + \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2} + \frac{\alpha^2}{f^2} + 2g\zeta + 2\chi'(t) - (\Omega'(t))^2 + 2g\,\Omega(t), \right.$$

eine im allgemeinen Falle schwerlich separirbare Differentialgleichung. Nehmen wir indess die translatorische Bewegung proportional der Zeit an, also $\Omega(t) = mt$,

so werden die ersten 3 Terme von (49.) Funktionen von ζ allein. Zerfällt man jetzt (49.) dadurch, dass man die 3 letzten Terme der Constanten 2β gleichsetzt, so erhält man:

$$2\chi(t) = (2\beta + m^2)t - mgt^2$$

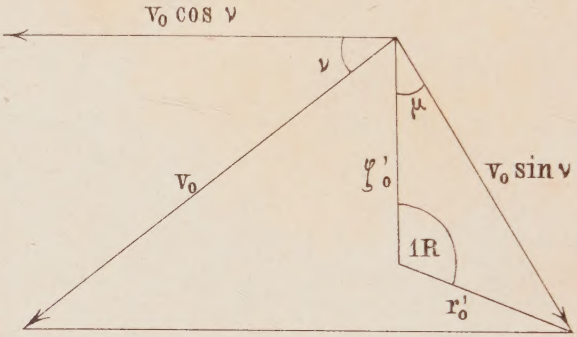
$$\varphi(\zeta) = m\zeta \pm \int^{\zeta} \frac{d\zeta}{f} \sqrt{(1 + f^2)\{f^2(-2\beta - 2g\zeta) - \alpha^2\}}$$

und dadurch:

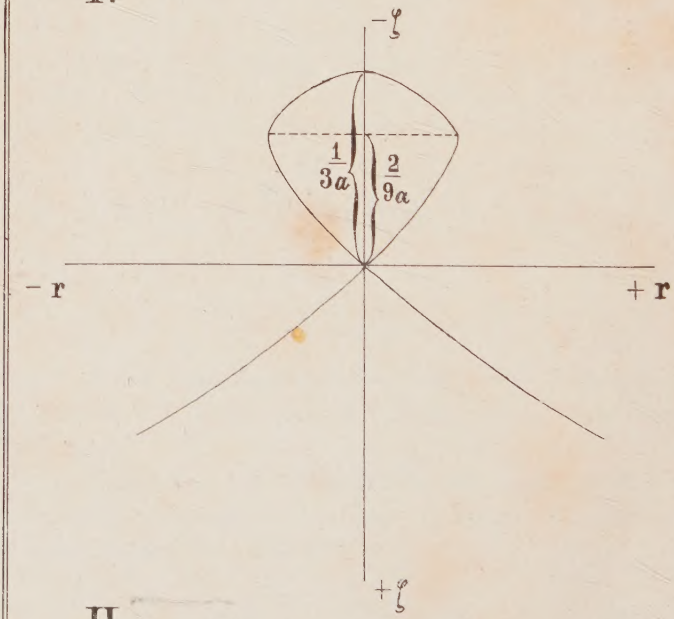
$$(50.)\qquad V = V_1 + \frac{m^2}{2} t - \frac{mg}{2} t^2 + m\zeta$$

wo V_1 gleich dem Ausdrucke (7.) ist. Die Ableitungen von V nach α und β sind identisch denen von V_1 nach denselben Grössen.

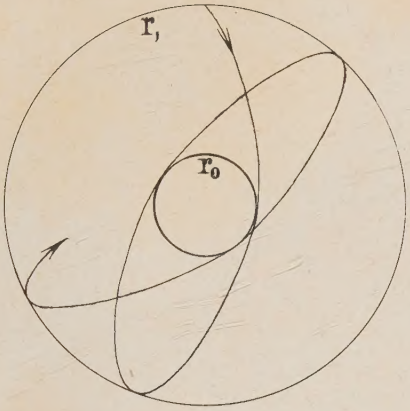
„Bewegt sich unsere Oberfläche mit constanter Beschleunigung in der Richtung der z Axe, so bleiben die Gleichungen (8.) unverändert in Geltung.“ —


$V_0 \cos \nu$
ν
μ
V_0
ζ'_0
$V_0 \sin \nu$
1R
r'_0

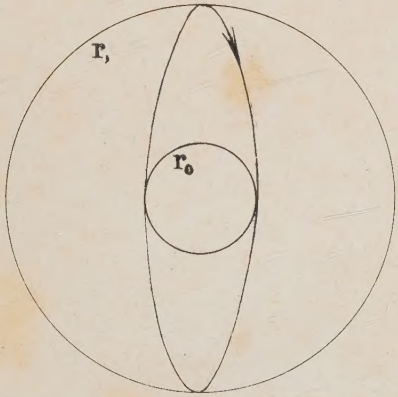
I.


$-\zeta$
$\frac{1}{3a}$
$\frac{2}{3a}$
$-r$
$+r$
$+\zeta$

II.



III.



IV.